

MINISTERO DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA

RELAZIONE ANNUALE

RESPONSABILE UNITÀ DI RICERCA

Anno 2005 - prot. 2005015133_001

Responsabile Scientifico dell'Unità di Ricerca:	SALAMON Simon Montague
Università	Politecnico di TORINO
Quota Cofinanziamento MIUR	20.700 €
Quota Cofinanziamento ATENEO	8.871 €
Cofinanziamento altri ENTI	0 €
Totale finanziamento	29.571 €

Illustrazione dell'attività svolta

All'interno della struttura generale del Progetto Nazionale, l'Unità di Torino aveva proposto quattro progetti di ricerca, ossia

- ...(A) Varietà con ologonomia eccezionale,
- ...(B) Ologonomia normale e spazi simmetrici,
- ...(C) Sottovarietà di spazi di Calabi-Yau,
- ...(D) Mappe tra varietà quaternioniche.

Il primo anno ha visto vari sviluppi in questi quattro settori e l'inizio di ricerche in alcuni campi strettamente e naturalmente collegati. Il lavoro dell'Unità nel 2006 ha messo in risalto l'importanza della geometria simplettica.

Per quanto riguarda (A), lo studio dell'ologonomia eccezionale è concentrato sul caso G_2 e sulle varietà di dimensione 7. Chiossi e Fino hanno messo in evidenza come le metriche con ologonomia G_2 siano determinate da un certo tipo di struttura $SU(3)$ sulle varietà di dimensione 6. Nel lavoro [4], mediante certe estensioni di gruppi e algebre di Lie, viene costruita una nuova metrica con ologonomia G_2 e (quindi) con tensore di Ricci nullo. Applicazioni di tecniche collegate alla classificazione di certi tipi di torsione intrinseca si trovano in [5]. I due lavori citati sono stati il punto di partenza per lo studio [17] di famiglie di connessioni con spinori paralleli, aprendo ulteriori direzioni di ricerca. Inoltre, Console sta studiando la geometria e topologia di varietà piatte con ologonomia discreta in relazione alle loro proprietà spettrali e l'operatore di Dirac.

Il risultati principali relativi a (B) si trovano nel preprint [20] di Console e Di Scala, in cui è determinata l'olonomia normale di sottovarietà complesse "simmetriche" dello spazio proiettivo complesso. Questo è un argomento centrale nello studio di sottovarietà, essendo collegato al teorema di Borel-Weil e alle algebre di Jordan. La teoria degli spazi hermitiani simmetrici gioca un ruolo fondamentale nei risultati ottenuti; ci sono diversi esempi notevoli che meriterebbero uno studio approfondito. Di Scala ha poi studiato il caso dei gruppi di isometria non-compatti: in [24] dimostra l'esistenza di molte orbite totalmente geodetiche in spazi simmetrici di tipo negativo e in [21] ottiene applicazioni all'olonomia Lorentziana. Invece, il preprint [22] "uniformizza" la struttura simplettica di un dominio limitato, mentre [23] mostra che la sua struttura Kaehleriana non è confrontabile con altri modelli.

La geometria delle varietà di Calabi-Yau (di dimensione reale 6) è un ingrediente fondamentale nella teoria delle stringhe ed è collegata alla "simmetria speculare", una dualità tra famiglie di tali varietà che viene realizzata mediante fibrazioni Lagrangiane aventi come fibra generica un 3-toro. Queste fibre sono le sottovarietà che formano l'oggetto di studio del progetto (C). Il lavoro di Matessi punta sugli aspetti simplettici di questa teoria: in [19],[11] vengono costruite opportune fibrazioni su certi spazi affini, che forniscono esempi espliciti di dualità al livello simplettico, usando tecniche di [18]. Mentre una sottovarietà Lagrangiana (speciale) può caratterizzare una metrica con olonomia $SU(3)$, la teoria delle ipersuperfici di varietà Calabi-Yau è stata sviluppata da Conti e Salamon [14] in un modo più vicino all'approccio in (A). Un'altra interessante struttura in dimensione 5 è studiata da Chiossi e Fino in [25].

Per quanto riguarda (D), l'articolo [1] caratterizza certe sottovarietà complesse non banali di varietà quaternioniche e si collega anche con il sottoprogetto (B). Mentre l'approccio dell'Unità verso i progetti (A) e (C) sottolinea il ruolo delle ipersuperfici, la costruzione duale mediante quozienti è stata sviluppata in [3] nel caso dell'olonomia $Sp(n)$. Questa rappresenta quindi una corrispondenza tra varietà quaternioniche. Una costruzione astratta di strutture ipercomplesse su gruppi risolubili, usando sempre la teoria delle connessioni (questa volta, piatte), è oggetto di [2].

Le ricerche dei quattro progetti elencati hanno portato allo sviluppo di alcuni aspetti indipendenti della geometria complessa e simplettica. Salamon ha indagato le deformazioni di alcuni tipi di strutture complesse su nilvarietà [9], e questo lavoro è stato proseguito in [6],[13]. In particolare, Console e Fino hanno provato che le deformazioni di Kuranishi di strutture complesse abeliane sono tutte invarianti. La teoria di "strutture complesse generalizzate" (sul fibrato $TM + T^*M$) è attualmente di grande interesse per la fisica matematica, e [26] tratta il caso $SU(3) \times SU(3)$.

Infine, Abbena e Salamon hanno completato il loro lavoro sul testo [10] e hanno messo online il software associato. Anche se il materiale non è direttamente collegato con i quattro progetti, il libro contiene diversi aspetti di ricerca vicini ad esso (in particolare, i Capitoli 21,22,23 su superfici con curvatura costante, applicazioni di una variabile complessa, e l'uso dei gruppi di quaternioni).

PUBBLICAZIONI SU RIVISTE INTERNAZIONALI

(Gli oggetti indicati con * erano già citati in un'altra forma nella domanda del Progetto Nazionale)

[1] D. Alekseevsky, A. Di Scala, S. Marchiafava: Parallel Kaehler submanifolds of quaternionic Kaehler symmetric spaces, *Tohoku Math. J.* 57 (2005), 521-540.

[2] A. Andrada, S. Salamon: Complex product structures on Lie algebras, *Forum Math.* 17 (2005), 261-295.

[3*] M.L. Barberis, I. Dotti, A. Fino: Hyper-Kaehler quotients of solvable Lie groups, *J. Geom. Phys.* 56 (2006), 691-711.

[4*] S. Chiossi, A. Fino: Conformally parallel G_2 structures on a class of solvmanifolds, *Math. Z.* 252 (2006), 825-848.

[5*] S. Chiossi, A. Swann: G_2 structures with torsion from half-integrable nilmanifolds, *J. Geom. Phys.* 54 (2005), 262-285.

- [6] S. Console, A. Fino, Y.S. Poon: Stability of abelian complex structures, *Internat. J. Math.* 17 (2006), 401-416.
- [7] A. Di Scala: On submanifolds whose shape operator is unipotent, *J. Geom.* 85 (2006), 32-34.
- [8] A. Fino: Almost Kaehler 4-dimensional Lie groups with J-invariant Ricci tensor, *Differential Geom. Appl.* 23 (2005), 26-37.
- [9] C. Maclaughlin, H. Pedersen, Y.S. Poon, S. Salamon: Deformation of 2-step nilmanifolds with abelian complex structures, *J. London Math. Soc.* 73 (2006), 173-193.

LIBRO

- [10*] A. Gray, E. Abbena, S. Salamon: *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, Third Edition. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006 (1008 pp. ISBN: 978-1-58488-448-4).

ARTICOLI COLLEGATI A CONVEGNI

- [11] R. Castano-Bernard, D. Matessi: Some piecewise smooth Lagrangian fibrations, *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* 63 (2005), 223-253.
- [12] S. Chiossi, A. Fino: Special metrics in G_2 geometry, *Rev. Un. Mat. Argentina* 47 (2006), 35-49.
- [13] S. Console, Dolbeault cohomology and deformations of nilmanifolds, *Rev. Un. Mat. Argentina* 47 (2006), 51-60.
- [14] D. Conti, S. Salamon: Reduced holonomy, hypersurfaces and extensions, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* 3 (2006), 899-912.
- [15] A. Di Scala: Polar actions on Berger spheres, *Int. J. Geometric Methods Mod. Physics* 3 (2006), 1019-1023.
- [16] A. Di Scala: Bracket and curvature, *Rev. Colombiana Mat.* 39 (2005), 113-131.

PREPRINT DI PUBBLICO DOMINIO

- [17] I. Agricola, S. Chiossi, A. Fino: Solvmanifolds with integrable and non-integrable G_2 structures, math.DG/0510300, in corso di stampa su *Differential Geom. Appl.*
- [18] R. Castano-Bernard, D. Matessi: Semi-global invariants of piecewise smooth Lagrangian fibrations, math.SG/0603498.
- [19] R. Castano-Bernard, D. Matessi: Lagrangian 3-torus fibrations, math.SG/0611139.
- [20] S. Console, A. Di Scala, Parallel submanifolds of complex projective space and their normal holonomy, math.DG/0611421.
- [21] A. Di Scala, T. Leistner, T. Neukirchner. Irreducibly acting subgroups of $Gl(n, \mathbb{R})$, math.DG/0507047.
- [22] A. Di Scala, A. Loi: Symplectic duality of symmetric spaces, math.DG/0603141.
- [23] A. Di Scala, A. Loi: Kaehler manifolds and their relatives, math.DG/0601739.
- [24] A. Di Scala, C. Olmos: A geometric proof of Karpelevich-Mostow's theorem, math.DG/0702201.
- [25] A. Fino, S. Chiossi: Nearly integrable $SO(3)$ -structures on 5-dimensional Lie groups, math.DG/0607392.
- [26] A. Fino, A. Tomassini: Generalized G_2 -manifolds and $SU(3)$ -structures, math.DG/0609820.

PARTICIPAZIONE A CONVEGNI

S. Chiossi, A. Fino, S. Salamon in: Workshop on Special Geometries in Mathematical Physics, Kuehlingsborn, marzo 2006.

S. Garbiero in: Transformation groups in pseudo-Riemannian geometry, MPI, Leipzig, giugno 2006.

A. Fino, S. Salamon in: Geometry Conference in honour of Nigel Hitchin, Madrid, sett. 2006 (Salamon co-organizzatore).

A. Fino, S. Chiossi: XV International Workshop on Geometry and Physics, Puerto de la Cruz, Tenerife, Spagna, sett. 2006.

DOTTORANDI E POST-DOC

Nel 2006, le seguenti persone (non iscritte nel Progetto Nazionale poichè coinvolte nelle ricerche in un periodo successivo alla domanda) hanno svolto ricerche sotto la direzione di Salamon: i dottorandi G. Mihaylov (Università di Milano) e M. Povero (Politecnico di Torino) hanno iniziato la preparazione della tesi; il dottore di ricerca F. Lonegro (Politecnico di Torino) lavora sul progetto (A).

Schema riassuntivo dei fondi utilizzati (cifre spese)

Voce di spesa	Spese indicate nella rideterminazione di base e/o rimodulazione	Cifra spesa	Descrizione
Materiale inventariabile	6.580	6.298	Un computer portatile IMAC, una workstation PC. Libri e riviste scientifiche.
Grandi Attrezzature	0	0	
Materiale di consumo	825	43	Materiale di consumo per PC.
Quota forfetaria certificata	2.366	2.366	Spese amministrative.
Spese per calcolo ed elaborazione dati	600	600	Quota canone server.
Personale a contratto (escluse le borse di dottorato)	0	0	
Dottorati di ricerca a carico del PRIN 2005	0	0	
Servizi esterni	0	0	

Missioni	10.200	2.500	Varie missioni dei membri del gruppo in Italia. Partecipazione a convegni in Germania e Spagna.
Pubblicazioni	0	0	
Partecipazione / Organizzazione convegni	1.000	0	
Altro	8.000	6.996	Soggiorno di vari ospiti per collaborazioni scientifiche. Spese di funzionamento del Dipartimento.
TOTALE	29.571	18.803	

Data 28/02/2007 16:48